Examen HAX503X – 2ème session

Durée 3h00. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. Questions de cours

1. Donner la définition d'une mesure image et le théorème de transfert. (2pt)

> **Définition 0.1.** Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(Y, \mathscr{B})$ un espace mesurable et $F : X \to Y$ une application mesurable. L'application
>
> $$\begin{array}{rcl} F_*\mu : \mathscr{B} & \to & \overline{\mathbb{R}}+ \\ B & \mapsto & \mu(F^{-1}(B)) \end{array}$$
>
> est une mesure sur $(Y, \mathscr{B})$. Elle s'appelle la **mesure image** de μ par F.

Si $(X, \mathscr{A}, \mu)$ est un espace mesuré, $(Y, \mathscr{B})$ un espace mesurable et $T : X \to Y$ une application mesurable, la mesure image $T_*\mu$ est donnée par la Définition 0.1. L'intégration des fonctions pour la mesure image est donnée par le Théorème de transfert:

> **Théorème 0.1.** Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(Y, \mathscr{B})$ un espace mesurable et $T : X \to Y$ une application mesurable. Pour toute fonction mesurable $f : Y \to \mathbb{C}$ on a $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(Y, T_*\mu)$ si et seulement si $f \circ T \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \mu)$, et dans ce cas on a $\displaystyle\int_Y f d(T_*\mu) = \int_X (f \circ T) d\mu$.

Exercice 2.

On munit $\mathbb{R}_+^*$ de sa tribu borélienne usuelle et de la mesure de Lebesgue λ. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note

$$I_n = \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{e^x + x^n} d\lambda(x).$$

1. Montrer que l'intégrale I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. (1.5pt)

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{e^x+x^n}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$(comme inverse d'une fonction continue ne s'annulant pas), et donc borélienne. Comme elle ne prend que des valeurs positives, l'intégrale I_n est bien définie comme élément de $[0, +\infty]$. Mais par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$on a

$$0 \leqslant \frac{1}{e^x + x^n} \leqslant \frac{1}{e^x}$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{e^x + x^n} dx \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x} dx = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{1}{e^x} dx = \lim_{A \to +\infty} \left(1 - e^{-A}\right) = 1 < +\infty.$$

Cela prouve que f est en fait intégrable sur $\mathbb{R}_+$(NB : ce dernier calcul est licite car on a déjà justifié que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{e^x+x^n} dx$ a un sens).

2. Étudier la limite éventuelle de I_n quand n tend vers $+\infty$. (2pt)

   Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a
   $$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x < 1, \\ e^{-1}+1 & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$
   On a vu à la question précédente que pour tous $x \in \mathbb{R}_+$et $n \in \mathbb{N}$ on a
   $$0 \leqslant \frac{1}{e^x + x^n} \leqslant \frac{1}{e^x}$$
   et que la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de convergence dominée on obtient alors
   $$I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1}.$$

Exercice 3. Dans tout cet exercice, μ et v désignent deux mesures finies sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. On appelle convolée de μ et ν et on note $\mu * \nu$ la mesure image de la mesure produit $\mu \otimes \nu$ par l'application $S : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto x + y$. Ainsi, pour toute fonction borélienne et positive $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, on a
$$\int_{\mathbb{R}} f d(\mu * \nu) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x+y) d(\mu \otimes \nu)(x, y),$$
et d'après le théorème de Fubini-Tonelli, cette intégrale peut encore s'écrire
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x+y) d\mu(x) \right) d\nu(y) \text{ ou } \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x+y) d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

1. On admettra dans la suite que la convolée de deux mesures finie est finie.

   (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Déterminer $\delta_a * \delta_b$ où δ_a et δ_b désignent les mesures de Dirac aux points a et b. (1pt)

   Vérifions que $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$. En effet, on a, pour tout $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$,
   $$\begin{aligned}(\delta_a * \delta_b)(B) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x+y) d(\delta_a \otimes \delta_b)(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x+y) d\delta_a(x) \right) d\delta_b(y) \quad = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(a+y) d\delta_b(y) = \mathbb{1}_B(a+b) = \delta_{a+b}(B).\end{aligned}$$

   (b) Déterminer $\delta_a * \mu$. En déduire $\delta_0 * \mu$. (1.5pt)

   On pose, pour tout $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$, $B - a = \{y \in \mathbb{R} | y = x - a, x \in B\}$. On a alors
   $$\begin{aligned}(\delta_a * \mu)(B) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x+y) d(\delta_a * \mu)(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x+y) d\delta_a(x) \right) d\mu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(a+y) d\mu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{B-a}(y) d\mu(y) \\ &= \mu(B-a) = (t_a * \mu)(B).\end{aligned}$$

où on a posé $t_a(y) = y + a$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Donc $\delta_a * \mu$ est la mesure image de μ par la translation t_a de vecteur a. En particulier $\delta_0 * \mu = \mu$, autrement dit, la loi $*$ admet δ_0 pour élément neutre.

2. Soient f et g deux fonctions positives et intégrables sur $\mathbb{R}$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ. On notera $f \cdot \lambda$ la mesure à densité f par rapport à la mesure de Lebesgue λ. (1.5pt)

   (a) Montrer que $(f \cdot \lambda) * \nu$ est une mesure à densité h que l'on déterminera.

   En appliquant le théorème de Fubini-Tonelli , on a, pour tout $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
(f \cdot \lambda) * \nu(B) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(u+y) d\left(f \cdot \lambda \otimes \nu\right)(u,y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(u+y) d\left(f \cdot \lambda\right)(u) \right) d\nu(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(u+y) f(u) d\lambda(u) \right) d\nu(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x) f(x-y) d\lambda(x) \right) d\nu(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x) \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) d\nu(y) \right) d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x) h(x) d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B d\left(h \cdot \lambda\right) \\
&= \left(h \cdot \lambda\right)(B),
\end{aligned}$$

   où h est la fonction définie pour λ-presque tout x dans $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) d\nu(y)$$

   Ainsi, $(f \cdot \lambda) * \nu$ est la mesure ayant h pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue λ.

   (b) En déduire que $(f \cdot \lambda) * (g \cdot \lambda) = (f * g) \cdot \lambda$ (1pt).

   On déduit de la question précédente que, si $\nu = g \cdot \lambda$ pour λ presque tout x dans $\mathbb{R}$, alors

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) d\left(g \cdot \lambda\right)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) d\lambda(y) = f * g(x).$$

   Ainsi,

$$(f \cdot \lambda) * (g \cdot \lambda) = (f * g) \cdot \lambda.$$

3. Soit $s \in]0, +\infty[$ fixé. On considère pour tout $a \in]0, +\infty[$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\gamma_a(x) = \frac{s^a}{\Gamma(a)} e^{-sx} x^{a-1} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$.

   (a) Vérifier que, pour tout $a > 0$, la mesure $\mu_a = \gamma_a \cdot \lambda$ est une probabilité. (1pt)

Pour prouver que μ_a est une probabilité, il suffit de vérifier que $\mu_a(\mathbb{R}) = 1$. En utilisant le changement de variable $y = sx$, on a

$$\begin{aligned}\mu_a(\mathbb{R}) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{s^a}{\Gamma(a)} e^{-sx} x^{a-1} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) d\lambda(x) = \frac{s^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^{a-1} dx \\ &= \frac{s^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-y} \left(\frac{y}{s}\right)^{a-1} \frac{dy}{s} = \frac{s^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a)}{s^a} = 1.\end{aligned}$$

(b) Soit $(a, b) \in]0, +\infty[^2$. Expliciter la fonction $\gamma_a * \gamma_b$ et en déduire la mesure $\mu_a * \mu_b$. (2.5pt)

Si $x \leqslant 0$, il est clair que $\gamma_a * \gamma_b(x) = 0$. Si $x > 0$, alors

$$\begin{aligned}\gamma_a * \gamma_b(x) &= \frac{s^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{\mathbb{R}} e^{-s(x-y)} (x-y)^{a-1} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x-y) e^{-sy} y^{b-1} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \\ &= \frac{s^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-sx} \int_0^x (x-y)^{a-1} y^{b-1} dy,\end{aligned}$$

par ailleurs, en effectuant le changement de variable $t = \frac{y}{x}$, on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^x (x-y)^{a-1} y^{b-1} dy &= x^{a+b-1} \int_0^x \left(1 - \frac{y}{x}\right)^{a-1} \left(\frac{y}{x}\right)^{b-1} \frac{dy}{x} \\ &= x^{a+b-1} \int_0^1 (1-t)^{a-1} t^{b-1} dt \\ &= x^{a+b-1} B(a, b) = x^{a+b-1} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\end{aligned}$$

d'où

$$\gamma_a * \gamma_b(x) = \frac{s^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-sx} x^{a+b-1} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \gamma_{a+b}(x)$$

En conclusion

$$\gamma_a * \gamma_b = \gamma_{a+b} \text{ et } \mu_a * \mu_b = \mu_{a+b}.$$

Exercice 4. Intégrale à paramètre Soit μ une mesure borélienne finie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on note

$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} d\mu(x)$$

1. Montrer que la fonction ϕ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$. (2pt)

2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} e^{iat} \phi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} K(n(a-x)) d\mu(x).$$

où $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $K(y) = \begin{cases} \frac{\sin(y)}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}$..

(1pt)

3. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} e^{iat} \phi(t) dt$. En déduire que, si ϕ est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$, alors la mesure μ est diffuse (c'est à dire que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $\mu(\{a\}) = 0$). (3pt)