Contrôle continu 3

Durée 1h10. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. On définit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}}$$

1. Déterminer la limite de f en $(0,0)$.

   On a $|f(x,y)| \leq (x^2+y^2)/(x^2+y^2)^{3/4} = (x^2+y^2)^{1/4} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$. Ainsi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

2. En déduire que l'on peut prolonger f en une fonction $\tilde{f}$ continue sur tout $\mathbb{R}^2$.

   Comme f est clairement continue (c'est un quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas) sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, il suffit de poser $\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (y,x) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

3. Étudier l'existence des dérivées partielles de $\tilde{f}$. Les calculer lorsqu'elles existent.

   Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la fonction $\tilde{f}$ admet les dérivées partielles suivantes :

   $$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y) = \frac{2\,x}{(y^2+x^2)^{\frac{3}{4}}} - \frac{3\,x^3}{2\,(y^2+x^2)^{\frac{7}{4}}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y) = -\frac{3\,x^2\,y}{2\,(y^2+x^2)^{\frac{7}{4}}}$$

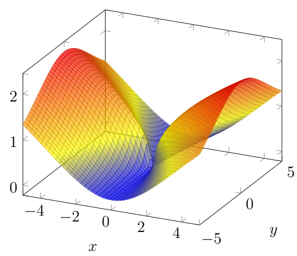
   En $(x,y) = (0,0)$ la fonction partielle $y \mapsto f(0,y) = 0$ et il vient $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(0,0) = 0$. De plus

   $$\frac{\tilde{f}(x,0) - \tilde{f}(0,0)}{x-0} = |x|^{-1/2},$$

   ce taux d'accroissement tend vers $+\infty$ si x tend vers 0, et donc $\tilde{f}$ n'admet pas de dérivée partielle par rapport à la première variable en $(0,0)$.

4. Sur quel domaine la fonction $\tilde{f}$ est-elle différentiable ?

   Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la fonction $\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^1$ et est donc différentiable. En l'origine, on a un point singulier : la fonction partielle $x \mapsto \tilde{f}(x,0) = |x|^{2-3/2} = |x|^{1/2}$ admet un point anguleux en $x = 0$:



Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}$, on cherche toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = a. \qquad (1)$$

1. On pose $\phi : (u, v) \to ((u + v)/2, (v - u)/2)$. Montrer que ϕ est un $\mathcal{C}^1$-diffeomorphisme sur $\mathbb{R}^2$ et preciser son inverse.

   La fonction ϕ est une application linéaire inversible (d'inverse $\phi^{-1}(x, y) = (x - y, x + y)$). Les applications ϕ et ϕ^{-1} sont donc $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ et donnent bien des difféomorphismes du plan.

2. Étant donnée une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ solution de (1), on pose $f = g \circ \phi$. Démontrer alors que $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = \frac{a}{2}$.

   On pose $\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ et il faut appliquer la règle de la chaîne :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\\ &= \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\frac{1}{2} - \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)}_{\text{utiliser (1)}} = \frac{a}{2}\end{aligned}$$

3. Intégrer l'expression de la question précédente pour en déduire une expression générique de f.

   La dérivée partielle de f par rapport à u est une constante : on a donc

$$f(u, v) = \frac{a}{2}u + h(v) + b$$

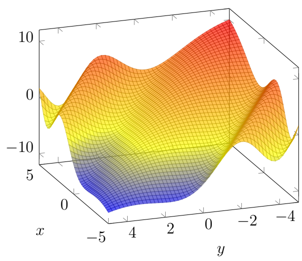
   où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ quelconque et $b \in \mathbb{R}$ (on aurait pu “rentrer” la constante b dans la fonction $h\ldots$).

4. En déduire les solutions de (1).

   On utilise le changement de variable inverse. On a

$$g(x, y) = f \circ \phi^{-1}(x, y) = \frac{a}{2}(x - y) + h(x + y) + b.$$

   qui est bien solution de (1). Voici un exemple avec $a = 2$, $b = 0$ et $h(v) = 3\sin(-v^2/10)$:



Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + 4xy^2 + x^2 + 4y^2$.

1. Démontrer que les 4 points critiques de la fonction f sont $(0, 0)$, $(-2, 0)$, $(-1, -1/2)$ et $(-1, 1/2)$.

   La fonction f est clairement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynôme. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x^2 + 4y^2 + 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 8xy + 8y,$$

et
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2x+2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 8y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 8x+8.$$
Un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique si et seulement si
$$\begin{cases} x^2+4y^2+2x = 0 \\ y(x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4y^2+2x = 0 \\ y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{cases}.$$
Ainsi si $y=0$ on obtient de la première équation $x=0$ ou $x=-2$; et si $x=-1$ on obtient $y=-1/2$ ou $y=1/2$. Il y a donc quatre points critiques : $(0,0)$, $(-2,0)$, $(-1,-1/2)$ et $(-1,1/2)$.

2. Déterminer la nature (maximum, minimum, point selle) de chacun de ces points critiques.
   - Point $(0,0)$: on a
   $$\mathrm{Hess}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix},$$
   et avec les notations du cours on obtient $rt - s^2 = 16 > 0$ et $r = 2 > 0$, donc $(0,0)$ est un minimum local de f.
   - Point $(-2,0)$: on a
   $$\mathrm{Hess}_f(-2,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix},$$
   ce qui implique $rt - s^2 = 16 > 0$ et $r = -2 < 0$, donc $(-2,0)$ est un maximum local de f.
   - Point $(-1,-1/2)$: on a
   $$\mathrm{Hess}_f(-1,-1/2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},$$
   ce qui implique $rt - s^2 = -16 < 0$, donc $(-1,-1/2)$ est un point selle de f.
   - Point $(-1,1/2)$: on a
   $$\mathrm{Hess}_f(-1,1/2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$
   ce qui implique $rt - s^2 = -16 < 0$, donc $(-1,1/2)$ est un point selle de f.

3. La fonction f possède-t-elle un maximum global ?

   On peut considérer la restriction $y \mapsto f(0,y) = 4y^2$ qui n'est pas majorée par un nombre fini. La fonction f n'admet donc pas de maximum global.