DM

Devoir pouvant être fait en groupe de 3 personnes maximum.

L'exercice suivant présente les propriétés élémentaires d'un objet bien connu : la fonction de Cantor (ou de Cantor-Lebesgue suivant les auteurs) notée f dans la suite. Cette fonction est croissante, continue et λ_1-pp dérivable. Si on s'autorise à noter f' cette "fonction dérivée" on va montrer que $f' = 0$ λ_1-pp et qu'on a $f(1) - f(0) \neq \int_{[0,1]} f' d\lambda_1$ (on est alors bien loin du cadre du Théorème fondamental de l'analyse)...

Exercice 1. Escalier du diable On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0,1]$ par la récurrence suivante : $f_0(x) = x$, pour tout $x \in [0,1]$, et f_{n+1} est construite à partir de f_n comme suit :

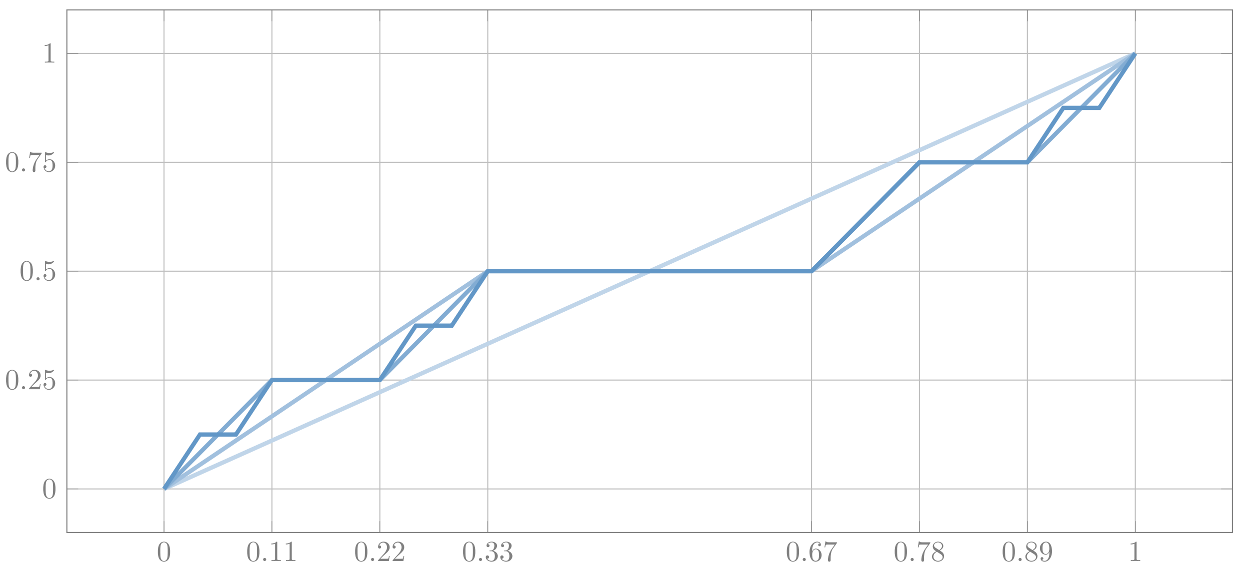
$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(3x), & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{3} < x \leqslant \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x-2), & \text{si } \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

1. Relire la Section 2.6 du cours. Rappeler quelle est la mesure de Lebesgue (notée λ_1) de l'ensemble de Cantor K.

   On a $\lambda_1(K) = 0$. L'ensemble de Cantor K est un négligable pour la mesure de Lebesgue tout en étant équipotent à $\mathbb{R}$. Il existe donc des parties de $\mathbb{R}$ qui sont négligeables et non-dénombrables. De plus, K est équipotent à $\mathbb{R}$, donc $\mathscr{P}(K)$ est équipotent à $\mathscr{P}(\mathbb{R})$. Comme $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est équipotent à $\mathbb{R}$, il existe donc des parties de K qui ne sont pas boréliennes.

2. Dessiner le graphe de f_0, f_1, f_2, f_3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue, croissante, $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$.

   Les fonctions f_n sont affines par morceaux, croissante et constantes sur les intervalles qu'on "enlève" de $[0,1]$ dans la construction de l'ensemble de Cantor. On a une pente de plus en plus forte sur les intervalles "restants". On a par construction $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



3. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a
$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leqslant \frac{3^{-1}}{2^n}.$$
Montrer alors que pour tout entier $n, p \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a
$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$
En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$. On note f sa limite : c'est la fonction de Cantor.

On peut faire une récurrence en utilisant la définition des f_n :
$$|f_0(x) - f_1(x)| = \begin{cases} \left|\frac{x}{2}\right|, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \\ \left|x - \frac{1}{2}\right|, & \text{si } \frac{1}{3} < x \leqslant \frac{2}{3} \\ \left|\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right|, & \text{si } \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$
Or on a
- $0 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{6}$ si $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$,
- $-\frac{1}{6} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} < x - \frac{1}{2} \leqslant \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ si $\frac{1}{3} < x \leqslant \frac{2}{3}$ et
- $-\frac{1}{6} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ si $\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1$.

Ce qui implique que $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_0(x) - f_1(x)| \leqslant \frac{1}{6}$. Maintenant, on remarque que pour tout $n \geqslant 1$ on a
$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_{n+1}(x)| &= \begin{cases} \left|\frac{1}{2}f_{n-1}(3x) - \frac{1}{2}f_n(3x)\right|, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \\ \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right|, & \text{si } \frac{1}{3} < x \leqslant \frac{2}{3} \\ \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_{n-1}(3x-2) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}f_n(3x-2)\right|, & \text{si } \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2}\begin{cases} |f_{n-1}(3x) - f_n(3x)|, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \\ 0, & \text{si } \frac{1}{3} < x \leqslant \frac{2}{3} \\ |f_{n-1}(3x-2) - f_n(3x-2)|, & \text{si } \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \end{aligned}$$
Ce qui donne $|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{2}\sup_{x\in[0,1]} |f_{n-1}(x) - f_n(x)|$. On en déduit par récurrence que $|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leqslant \frac{3^{-1}}{2^n}$.
Soit $n, p \in \mathbb{N}$, on a
$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &\leqslant |f_n(x) - f_{n+1}(x)| + |f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+p-1}(x) - f_{n+p}(x)| \\ &= \sum_{k=n}^{n+p-1} |f_k(x) - f_{k+1}(x)| \\ &\leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{3^{-1}}{2^k} \\ &\leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{3^{-1}}{2^k} = \frac{3^{-1}}{2^{n-1}} \leqslant \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

4. Montrer que f est continue et croissante sur $[0,1]$ et telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

La fonction f est définie comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues $(f_n)_n$ définies sur un fermé borné : f est donc nécessairement continue. De plus $f(0) = \lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$ et $f(1) = \lim_{n\to+\infty} f_n(1) = 1$.
On note que la fonction f est croissante, mais pas strictement croissante.

5. Montrer que f est dérivable et de dérivée nulle sur le complémentaire de l'ensemble de Cantor K. (D'où le nom de l'exercice)

   La fonction f est constante par morceau sur K^c le complémentaire de l'ensemble de Cantor (c'est un ouvert, comme réunion d'ouvert). Le taux d'accroissement de f est donc bien définies en chaque point de K^c et est nul. La fonction f est alors continue sur $[0,1]$, dérivable presque partout sur $[0,1]$ (dérivée nulle)... et bel et bien croissante.

6. Soit $I = \left[\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i}, \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n}\right]$ un des 2^n intervalles qui apparaissent à l'étape n de la construction de l'ensemble de Cantor K (donc $n \geqslant 1$ et $a_1, a_2, \dots \in \{0,2\}$).

   (a) Montrer que $f(\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^i}) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}}$, pour tout $a_1, a_2, \dots \in \{0,2\}$.

   On rappelle que tout nombre réel de $x \in [0,1]$ peut être écrit dans un développement triadique : $x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{3^i}$. Les points qui forment l'ensemble de Cantor K sont ceux pour lequel le développement triadique ne comporte pas de 1 (i.e. $a_i \in \{0,1\}$). Cette écriture définit certains éléments de K au travers de leur développement impropre $1 = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{2}{3^i}$. En fait, on nous demande de montrer qu'un nombre qui s'écrit en triadique $\underline{0.a_1a_2\cdots a_n\cdots}_{(3)}$ avec les $a_i \in \{0,2\}$ a pour image un nombre qui s'écrit en binaire $\underline{0.b_1b_2\cdots b_n\cdots}_{(2)}$ où $b_i = \frac{a_i}{2} \in \{0,1\}$. Par exemple $f(\underline{0.2022220022222222}_{(3)}) = \underline{0.1011110011111111}_{(2)}$.
   Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$, on considères les 2^n nombres réels dont le développement triadique est $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i}$ avec $a_i \in \{0,2\}$. On vérifie immédiatement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

   $$f_n\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^{i+1}}$$

   car les 2^n points $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i}$ sont les "extrémités gauches" des intervalles I. Il suffit alors de remarquer que $f_n\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i}\Big) = f_{n+1}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i}\Big)$ par construction. Une récurrence immédiate donne alors $f\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i}\Big) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^{i+1}}$. Pour conclure, on "passe à la limite" en remarquant que étant donné $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^i}$ on a

   $$\left|f\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i}\Big) - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}}\right| \leqslant \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

   La continuité de f assurant alors que l'on a bien le résultat demandé.

   (b) Montrer que I est un intervalle de longueur 3^{-n}, mais $f(I)$ est un intervalle de longueur 2^{-n}.

   On note qu'à chaque étape n il y a 2^n intervalles I qui apparaîssent dans la construction de K. On a biensûr $\lambda_1(I) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n} - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} = \frac{1}{3^n}$. Comme f est continue et croissante et d'après la question précédente, on a $f(I) = \left[f\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i}\Big), f\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n}\Big)\right]$. D'après la question précédente on a

   $$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^{i+1}}$$

   $$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n}\Big) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} + \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{2}{3^i}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^{i+1}} + \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}.$$

Dans la seconde égalité, on utilise le développement impropre : $\underline{0.a_0\cdots a_n1}_{(3)} = \underline{0.a_1\cdots a_n2222222\cdots}_{(3)}$ ("on peut remplacer un 1 en dernière position par une infinité de 2...").

(c) Montrer alors que f n'est pas dérivable en un point de l'ensemble de Cantor.

En posant $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^i}$ avec $a_i \in \{0,2\}$ et $h_n = \frac{1}{3^n}$ on a

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} =^n \Big(\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{a_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} - \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{a_i}{2^{i+1}}\Big) = \frac{3^n}{2^{n+1}} = (\frac{3}{2})^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Autrement dit, le taux d'accroissement de f en x n'est pas bien définie : il y a une marche infinitésimale dans l'escalier de Cantor en tout $x \in K$.

7. Montrer que l'image de l'ensemble K de Cantor par f satisfait $f(K) = [0,1]$ et donc $\lambda_1(f(K)) = 1$. Commenter...

La fonction f est continue sur $[0,1]$ avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Le Théorème des valeurs intermédiare implique alors que $f([0,1]) = [0,1]$ (f est surjective !) et on a $f(K) \subset [0,1]$.

On va montrer que $f(K^c) \subset f(K)$ et comme $f(K \cup K^c) = f([0,1]) = [0,1]$ on aura bien $[0,1] \subset f(K)$ qui implique l'égalité annoncée. Soit donc $y \in [0,1]$, il existe un antécédent $x \in K \cup K^c$ tels que $f(x) = y$. De deux choses l'une,

- $x \in K$ et on a $y \in f(K)$
- $x \in K^c$ et il existe $x' \in K$ tel que $f(x) = f(x') = y$ et on a $y \in f(K)$. En effet, x appartient à un des intervalle ouvert $I = \left]\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{3^i}, \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n}\right[$ mentionné à la question 6. Il suffit alors de prendre $x' = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{3^i}$ ("le bord gauche" de I) qui est dans K.

Pour tout $y \in [0,1]$ on a bien trouvé un $x \in K$ tel que $f(x) = y$.

La fonction f envoie (continuement !) le négligeable K (pour λ_1) sur un ensemble de mesure 1 (toujours pour λ_1).

8. **Bonus.** On pose $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + x)$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que $g : [0,1] \to [0,1]$ est continue, strictement croissante (donc une bijection). Puis que $g(K)$ est un ensemble fermé de $[0,1]$, et $\lambda_1(g(K)) = \frac{1}{2}$.

Soit $x, y \in [0,1]$ et tels que $x < y$, alors $x + f(x) < y + f(y)$ car f est croissante. La fonction $g = \frac{1}{2}(Id + f)$ est aussi continue comme combinaison de deux fonctions continues. L'image de K par g est un fermé borné (car g est continue). Enfin

$$g(K \cup K^c) = g(K) \cup g(K^c)$$

car g est une bijection. Or $\lambda_1(g(K^c)) = 1$ car f est constante par morceaux sur les $2^n - 1$ intervalles composant F_n^c (appraissant à l'itération n de la construction de K). On a donc $\lambda_1(F_n^c) = \lambda_1(g(F_n^c))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque.
- On pourra aller voir une zoologie d'exemples pathologiques de fonctions à l'adresse `http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_Lhopital/Lhopital0.html`
- Il existe une version probabiliste de l'escalier du diable. En effet, f est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.